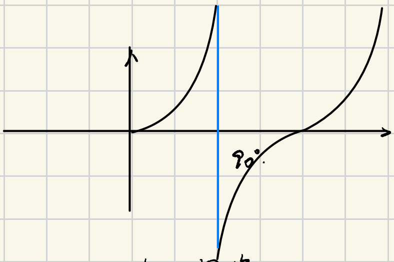
1. 直线

倾斜角

$\alpha \in [0, \pi)$.

$k = \tan\alpha = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$



tan 图像

2.

$$\begin{cases} y = kx + m. \\ y - y_0 = k(x - x_0) \end{cases}$$

竖直直线不能用.

$\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = 1.$ ⇒ 水平, 竖直, 过原点不能用.

$\dfrac{y - y_2}{y_1 - y_2} = \dfrac{x - x_2}{x_1 - x_2}$ ⇒ 水平, 竖直 不能用.

$ax + by + c = 0.$

反射式: $x = ty + m$. (圆锥用得多) ⇒ 不包括水平.

3. 直线平行.

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1 = 0. \\ A_2x + B_2y + C_2 = 0. \end{cases}$$

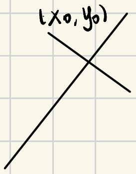
$\overset{\text{平行}}{\Longleftrightarrow}$ $A_1B_2 = A_2B_1$ 且 $\underbrace{A_1C_2 \neq A_2C_1 \text{ 或 } B_1C_2 \neq B_2C_1}_{\text{限制重合}}$.

⇕ 垂直.

$A_1A_2 + B_1B_2 = 0.$

和向量相似.

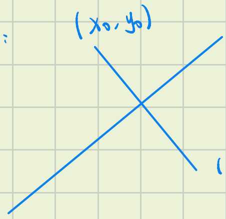
4. 对称.

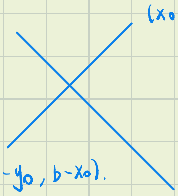


$Ax + By + C = 0.$

$\begin{cases} \text{垂直} \\ \text{中点.} \end{cases}$

大招:





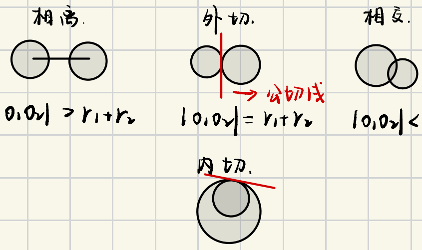
通用: $x = x_0 - 2A \cdot \dfrac{Ax_0 + By_0 + C}{A^2 + B^2}$

$= y_0 - 2B \cdot \dfrac{Ax_0 + By_0 + C}{A^2 + B^2}$

5. 平行线间距离公式

推导.

6. 圆与圆位置关系.

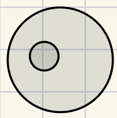


相离: $|O_1O_2| > r_1 + r_2$

外切: $|O_1O_2| = r_1 + r_2$

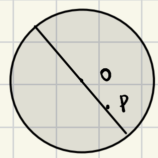
相交: $|O_1O_2| < r_1 + r_2$

内切: $|O_1O_2| = r_1 - r_2$.



$|O_1O_2| < r_1 - r_2$

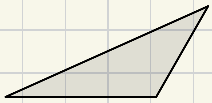
7. 过圆内定点的弦.



最长弦: 直径.

最短弦: 垂直于直径的弦.

8. 阿氏圆

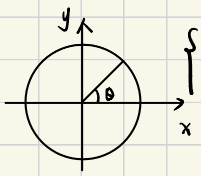


$\dfrac{P_A}{P_B} = \lambda \neq 1.$

则 P 轨迹为圆.

10. 圆の参数方程

$\underbrace{(x-a)}_{r\cos\theta}^2 + \underbrace{(y-b)}_{r\sin\theta}^2 = r^2$



$$\begin{cases} x = a + r\cos\theta \\ y = b + r\sin\theta \end{cases}$$

11. 极点极线

(x_0, y_0) 极点.

$x^2 + y^2 = r^2 \rightarrow (x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$

$x_0 \cdot x + y_0 \cdot y = r^2$

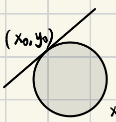
$(x_0 - a)(x - a) + (y_0 - b)(y - b) = r^2$

若 (x_0, y_0) 在曲线上, 极线表示切线

若 (x_0, y_0) 在曲线外, 极线表示切点弦.

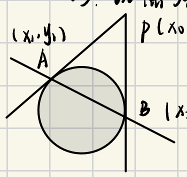
若 (x_0, y_0) 在曲线内, 极线与曲线相离.

12. 切线方程



切线: $x_0 \cdot x + y_0 \cdot y = r^2$

13. 切点弦



$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$

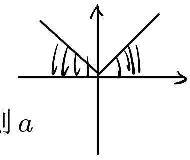
直线 AB: $(x_0 - a) \cdot (x - a) + (y_0 - b)(y - b) = r^2$

第 3 讲：直线与圆题型拓展 (1)

1. 下列说法正确的是（ BD ）　$a+a=0 \Rightarrow a=0$.

A. “$a=-1$”是“直线 $x-ay+3=0$ 与直线 $ax-y+1=0$ 互相垂直”的充分必要条件 ×

B. 直线 $x\cos\alpha-y+3=0$ 的倾斜角 θ 的取值范围是 $\left[0,\frac{\pi}{4}\right]\cup\left[\frac{3\pi}{4},\pi\right)$ ✓ $k=\cos\alpha\in[-1,1]$



C. 若圆 C_1: $x^2+y^2-6x+4y+12=0$ 与圆 C_2: $x^2+y^2-14x-2y+a=0$ 有且只有一个公共点，则 $a=34$ × 外切 或 内切. 一定有两个解.

D. 若直线 $y=x+b$ 与曲线 $y=3-\sqrt{4x-x^2}$ 有公共点，则实数 b 的取值范围是 $[1-2\sqrt{2},3]$ ✓. $\rightarrow y\le 3$.

C: $\boxed{配方}$ $(x-3)^2+(y+2)^2=1.\Rightarrow(3,-2)\quad r_1=1$

$(x-7)^2+(y-1)^2=50-a \Rightarrow (7,1)\quad r_2=\sqrt{50-a}$

1° $\sqrt{16+9}=5=1+\sqrt{50-a}$.

$\therefore 50-a=16 \Rightarrow a=34$.

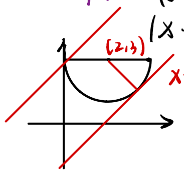
2° $5=\sqrt{50-a}-1$

$50-a=36$.

$a=14$.

D: 半圆 $(y-3)^2=4x-x^2$

$(x-2)^2+(y-3)^2=4$.



$x-y+b=0$　$d=\frac{|2-3+b|}{\sqrt{2}}=r=2$.

$\Rightarrow b=1+\sqrt{2}$ (舍) 或 $1-\sqrt{2}$

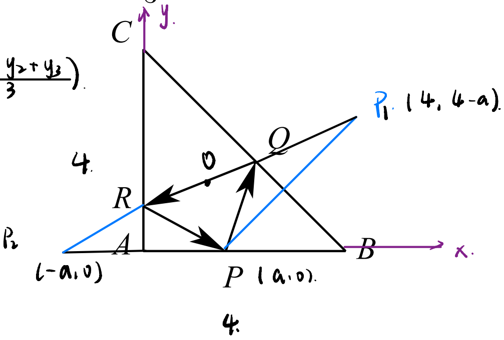
2. (2013·湖南) 在等腰直角三角形 ABC 中，$AB=AC=4$，点 P 是边上异于 AB 的一点，光线从点 P 出发，经 BC，CA 反射后又回到点 P(如图)，若光线 QR 经过 ΔABC 的重心，则 AP 等于（ D. ）

A. 2　　B. 1　　C. $\frac{8}{3}$　　D. $\frac{4}{3}$

$\downarrow$ $\boxed{对称}$

求重心：$\vec{AO}=\frac{1}{3}(\vec{AC}+\vec{AB})$.

$O\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3},\frac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)$.



$O\left(\frac{4}{3},\frac{4}{3}\right)$.

$k_{P_1P_2}=k_{P_2O}$.

$\frac{4-a}{4+a}=\frac{\frac{4}{3}}{\frac{4}{3}+a}=\frac{4}{4+3a}$.

$16+4a=(4-a)(4+3a)$

$a=\frac{4}{3}$.

3. 已知两条直线 l_1: $(\lambda+2)x+(1-\lambda)y+2\lambda-5=0$，$l_2$: $(k+1)x+(1-2k)y+k-5=0$，且 $l_1/\!/l_2$，当两平行线距离最大时，$\lambda+k=$（ C ）　过定点

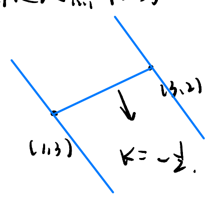
A. 3　　B. 4　　C. 5　　D. 6

考小题. 令 $\lambda=-2$. $3y=9\Rightarrow y=3$.

令 $\lambda=1$，$3x=3\Rightarrow x=1$　$\Rightarrow l_1$ 过定点 $(1,3)$

同理 l_2 过定点 $(3,2)$.

距离最大：连线垂直.



考大题：展开.

$\boxed{(2x+y-5)}+\lambda\boxed{(x-y+2)}=0$.

联立 $\begin{cases}2x+y-5=0.\\x-y+2=0.\end{cases}$

l_1/l_2 斜率 $=2$.

$\frac{\lambda+2}{\lambda-1}=\frac{k+1}{2k-1}=2\Rightarrow\begin{cases}\lambda=4\\k=1\end{cases}$

4. 在平面直角坐标系 xOy(O 为坐标原点)中，不过原点的两直线 l_1: $x-my+2m-1=0$、l_2: $mx+y-m-2=0$ 的交点为 P，过点 O 分别向直线 l_1、l_2 引垂线，垂足分别为 M，N，则四边形 $OMPN$ 的面积的最大值为（ D ）

A. 3　　B. $\frac{3}{2}$　　C. 5　　D. $\frac{5}{2}$

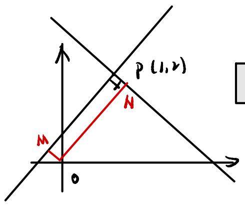
$\boxed{\text{过定点}}$

l_1: $x-1-m(y-2)=0$

$(1,2)$

l_2: $m(x-1)+y-2=0$.

$(1,2)$



$S=OM\cdot ON$

$OM^2+ON^2=OP^2=5\geqslant 2OM\cdot ON$

$\boxed{\text{垂直}}$

$1\cdot m+1\times(-m)=0$.

$\therefore l_1\perp l_2$.

5. 设动直线 l: $mx-y-2m+3=0(m\in R)$ 交圆 C: $(x-4)^2+(y-5)^2=12$ 于 A，B 两点(点 C 为圆心)，则下列说法正确的有（ AD ）

A. 直线 l 过定点 $(2,3)$ ✓ 圆内

B. 当 $|AB|$ 取得最小值时，$m=1$ -1.

C. 当 $\angle ACB$ 最小时，其余弦值为 $\cancel{\frac{1}{4}}$ $\frac{1}{3}$ ✗

D. $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$ 的最大值为 24 ✓ 投影.

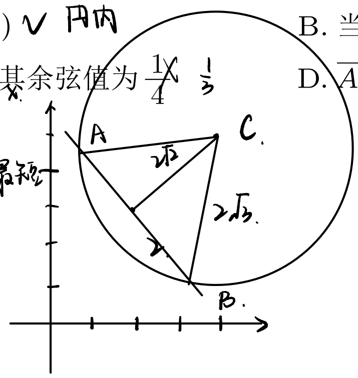
$2\sqrt{3}\times 4\sqrt{3}=24$

l: $m(x-2)-y+3=0$.

$(2,3)$

AB最短

$\frac{12+12-16}{24}=\frac{1}{3}$.



6. 已知直线 l_1: $kx+y-2k+3=0$，l_2: $x-ky+3k-4=0$，设两直线分别过定点 A，B，直线 l_1 和直线 l_2 的交点为 P，则下列结论正确的是（ AB ）

A. 直线 l_1 过定点 $A(2,-3)$，直线 l_2 过定点 $B(4,3)$ ✓.

B. $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=0$ ✓

C. $\triangle PAB$ 面积的最大值为 5　$\frac{1}{2}|PA||PB|$

D. 若 $C(-1,0)$，$D(1,0)$，则 P 恒满足 $|PD|=\sqrt{2}|PC|$ ✗

阿氏圆

$PA^2+PB^2=AB^2=40\geqslant 2|PA||PB|$

$|\overrightarrow{PA}|\cdot|\overrightarrow{PB}|\leqslant 20$.

l_1: $k(x-2)+y+3=0$.

$A(2,-3)$.

$k-k=0$.

$\therefore l_1\perp l_2$.

l_2: $x-4-k(y-3)=0$.

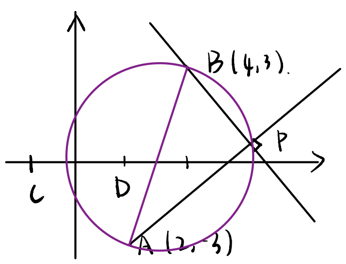
$B(4,3)$.

D: 设 $P(x,y)$.

$(x-1)^2+y^2=2[(x+1)^2+y^2]$

$\Rightarrow x^2+y^2+6x+1=0$.

$(x+3)^2+y^2=8$



阿氏圆

7. 古希腊著名数学家阿波罗尼斯与欧几里得、阿基米德齐名．他发现："平面内到两个定点 A，B 的距离之比为定值 $\lambda(\lambda\neq 1)$ 的点的轨迹是圆"．后来，人们将这个圆以他的名字命名，称为阿波罗尼斯圆，简称阿氏圆在平面直角坐标系 xOy 中，$A(-2,0)$，$B(4,0)$，点 P 满足 $\dfrac{|PA|}{|PB|}=\dfrac{1}{2}$．设点 P 的轨迹为 C，下列结论正确的是（ BC ）

A. C 的方程为 $(x+4)^2+y^2=9$ ✗

B. 在 x 轴上存在异于 A，B 的两定点 D，E，使得 $\dfrac{|PD|}{|PE|}=\dfrac{1}{2}$ ✓ 与 A、B 对称

C. 当 A，B，P 三点不共线时，射线 PO 是 $\angle APB$ 的平分线 ✓ 角平分线定理.

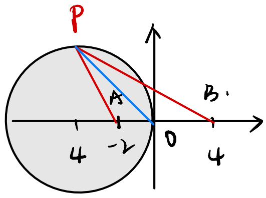
D. 在 C 上存在点 M，使得 $|MO|=2|MA|$ ✗

$PB=2PA \quad P(x,y)$

$(x-4)^2+y^2=4[(x+2)^2+y^2]$

$3x^2+3y^2+24x=0.$

$(x+4)^2+y^2=16.$



D: 设 $M(x,y)$

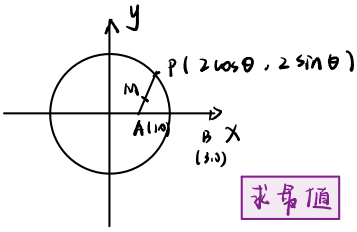
$x^2+y^2=4[(x+2)^2+y^2]$

$3x^2+3y^2+16x+16=0$

联立 $\Rightarrow x=2$，y 无解 $(y^2<0)$ ∴ 不存在.

8. 设 O 为坐标原点，P 是圆 $x^2+y^2=4$ 上任意一点，$A(1,0)$，M 是线段 PA 上的点，且 $|PM|=2|MA|$，$B(3,0)$，则直线 BM 的斜率的最大值为（ C ）

A. $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$　　B. $\dfrac{2\sqrt{15}}{15}$　　C. $\dfrac{2\sqrt{5}}{15}$　　D. $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$



$\vec{PM}=\frac{2}{3}\vec{PA}$

$(x_M-2\cos\theta,\ y_M-2\sin\theta)=\frac{2}{3}(1-2\cos\theta,\ -2\sin\theta)$

$\Rightarrow y_M=2\sin\theta-\frac{4}{3}\sin\theta=\frac{2}{3}\sin\theta$

求最值

$k_{BM}=\dfrac{\sin\theta-0}{\cos\theta-\frac{7}{2}} \Rightarrow (\cos\theta,\sin\theta)\ (\frac{7}{2},0) \quad =\frac{2}{15}\sqrt{5}$

9. 已知直线 l：$ax+by-r^2=0$ 与圆 C：$x^2+y^2=r^2$，点 $A(a,b)$，则下列说法正确的是（ABD）

A. 若点 A 在圆 C 上，则直线 l 与圆 C 相切

B. 若点 A 在圆 C 内，则直线 l 与圆 C 相离

C. 若点 A 在圆 C 外，则直线 l 与圆 C 相离

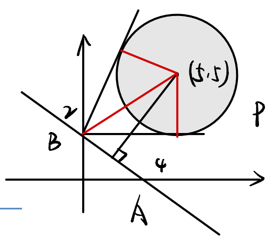
D. 若点 A 在直线 l 上，则直线 l 与圆 C 相切

极点极线

10. (2021·新高考Ⅰ) 已知点 P 在圆 $(x-5)^2+(y-5)^2=16$ 上，点 $A(4,0)$，$B(0,2)$，则（　　）

A. 点 P 到直线 AB 的距离小于 10 ✓　　✗ B. 点 P 到直线 AB 的距离大于 2

C. 当 $\angle PBA$ 最小时，$|PB|=3\sqrt{2}$　　D. 当 $\angle PBA$ 最大时，$|PB|=3\sqrt{2}$



l_{AB}：$\frac{x}{4}+\frac{y}{2}=1 \Rightarrow x+2y-4=0.$

$d=\dfrac{5+10-4}{\sqrt{5}}=\dfrac{11}{\sqrt{5}}$

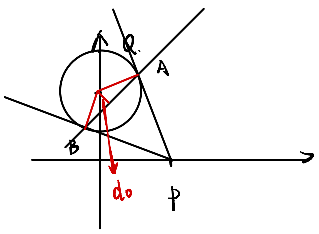
$d'=\frac{11}{\sqrt{5}}+4<10.$

切点弦一定在同川下方

11. (多选) 已知圆 C 的方程为 $x^2+(y-2)^2=1$，点 $Q(0,3)$，点 P 是 x 轴上的一个动点，过点 P 作圆 C 的两条切线，切点分别为 A，B，则（　　）

A. 存在切点 A，B 使得 $\angle AQB$ 为直角 ✗　　B. 直线 AB 过定点 $\left(0,\dfrac{3}{2}\right)$ ✓

C. $\overrightarrow{QA}\cdot\overrightarrow{QB}$ 的取值范围是 $\left[0,\dfrac{3}{2}\right]$ ✗　　D. $\triangle QAB$ 面积的取值范围是 $\left(0,\dfrac{3}{4}\sqrt{3}\right]$



$P(m,0)$

$m\cdot x+(-2)(y-2)=1$

$mx-2y+3=0$

$y=\frac{m}{2}x+\frac{3}{2}$

D: Q (0,3) 到 AB 距离.　$d_0=\frac{1}{\sqrt{m^2+4}}$

$d=\frac{3}{\sqrt{m^2+4}}$

$S_{\triangle QAB}=\frac{1}{2}|AB|\cdot d=\underbrace{\sqrt{\frac{m^2+3}{m^2+4}}}_{AB}\times\frac{3}{\sqrt{m^2+4}}=\frac{3\sqrt{m^2+3}}{m^2+4}=\frac{3t}{t^2+1}$

令 $m^2+3=t^2$

12. 过原点 O 作圆 $x^2+y^2-6x-8y+20=0$ 的两条切线，设切点分别为 P,Q，则 $\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}=$ ______；线段 PQ 的长为 ______.

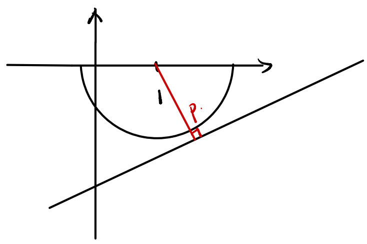
$\boxed{\text{求切点弦}}$

13. 设点 P 是函数 $y=-\sqrt{4-(x-1)^2}$ 图象上任意一点，点 $Q(2a,a-3)\,(a\in R)$，则 $|PQ|$ 的最小值为 $\underline{\sqrt{5}-2}$.

半円

$y^2=4-(x-1)^2$

$(x-1)^2+y^2=4.$

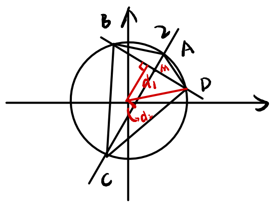


$\begin{cases}x=2a\\y=a-3\end{cases}\Rightarrow x=2(y+3)$

$\Rightarrow x-2y-6=0.$

14. 已知 AC、BD 为圆 O:$x^2+y^2=4$ 的两条相互垂直的弦，垂足为 $M(1,\sqrt{2})$，则四边形 $ABCD$ 的面积的最大值为 $\underline{\ 5\ }$.

$\boxed{\text{垂径定理}}$



$S=\frac{1}{2}|AC||BD|=2\sqrt{4-d_1^2}\sqrt{4-d_2^2}\le(4-d_1^2)+(4-d_2^2)=5.$

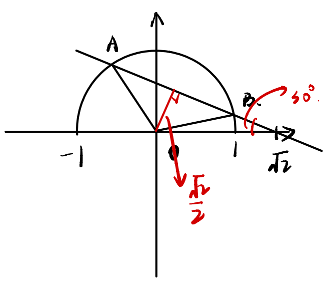
$|BD|=2\sqrt{4-d_1^2}$

$|AC|=2\sqrt{4-d_2^2}$

$d_1^2+d_2^2=OM^2=3.$

当且仅当 $4-d_1^2=4-d_2^2$ 即 $d_1=d_2$ 时取等.

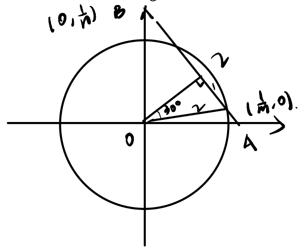
15. 过点$(\sqrt{2},0)$引直线 l 与曲线 $y=\sqrt{1-x^2}$ 相交于 A，B 两点，O 为坐标原点，当 $\triangle AOB$ 的面积最大时，直线 l 的斜率等于 ______.



$S=\frac{1}{2}OA\cdot OB\cdot\sin\theta\le\frac{1}{2}.$

$\theta=90°$ 时

16. (2012·天津) 设 $m, n \in R$，若直线 $l: mx+ny-1=0$ 与 x 轴相交于点 A，与 y 轴相交于点 B，且 l 与圆 $x^2+y^2=4$ 相交所得弦的长为 2，O 为坐标原点，则 $\triangle AOB$ 面积的最小值为 ______.



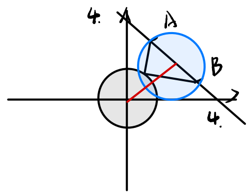
$S=\frac{1}{2}\left|\frac{1}{m}\right|\left|\frac{1}{n}\right|$

$d=\sqrt{3}$.

17. (2023·湖北模拟) 已知点 P 在圆 $O: x^2+y^2=1$ 运动，若对任意点 P，在直线 $l: x+y-4=0$ 上均存在两点 A, B，使得 $\angle APB \geqslant \frac{\pi}{2}$ 恒成立，则线段 AB 长度的最小值是（ D. ）

A. $\sqrt{2}-1$ B. $\sqrt{2}+1$ C. $2\sqrt{2}-1$ D. $4\sqrt{2}+2$

有圆相交.



$r-1 \le |OO_1| = 2\sqrt{2} \le r+1$

$2\sqrt{2}-1 \le r \le 2\sqrt{2}+1$

$4\sqrt{2}-2 \le AB \le 4\sqrt{2}+2$

半径之和 ≥ 圆心距 ≥ 半径之差

⊙O $x^2+y^2=1$ 始终在以 AB 为直径的圆内或圆上.

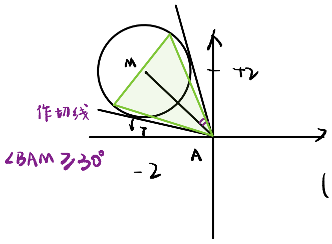
18. 已知圆 $M: (x+2)^2+(y-2)^2=2$，点 $A(t, 0)$，若圆 M 上存在两点 B, C，使得 $\triangle ABC$ 是等边三角形，则实数 t 的取值范围是（ D ）

A. $[-3, 1]$ B. $[-5, 1]$ C. $[-3, -1]$ D. $[-4, 0]$

⇕

存在点 B 使 $\angle BAM = 30°$

相切时存在即可.



$\theta \ge 30°$

$\sin\theta \ge \frac{1}{2}$

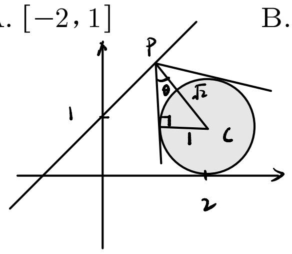
$\frac{\sqrt{2}}{|MA|} \ge \frac{1}{2}$

$(t+2)^2+4 \le 8$ $-4 \le t \le 0$.

19. 已知点 P 为直线 $l: x-y+1=0$ 上的动点，若在圆 $C: (x-2)^2+(y-1)^2=1$ 上存在两点 M, N，使得 $\angle MPN=60°$，则点 P 的横坐标的取值范围为（ C ）

$y=x+1$

A. $[-2, 1]$ B. $[-1, 3]$ C. $[0, 2]$ D. $[1, 3]$



$\sin\theta \ge \frac{1}{2}$.

$PC \ge 2$.

$C(2,1)$

$P(p, p+1)$.

$(2-p)^2+p^2=4$.

$4+p^2-4p+p^2=4$

$p^2-2p=0$.

$p(p-2)=0$.

$P_1=0$.

$P_2=2$.

$\therefore p \in [0, 2]$.

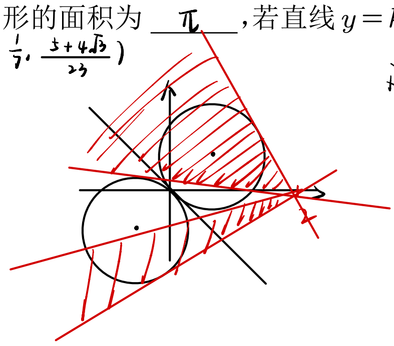
20. 曲线 $C: x^2+y^2=|x+y|$ 围成的封闭图形的面积为 __π__，若直线 $y=k(x-2)$ 与 C 恰有两个公共点，则 k 的取值范围为 $\left(-1, \frac{5-4\sqrt{3}}{23}\right) \cup \left(\frac{1}{7}, \frac{5+4\sqrt{3}}{23}\right)$

过 $(2, 0)$.

讨论

$x+y \ge 0$. $x^2+y^2=x+y$.

$(y \ge -x)$ 的半个平面 $\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{2}$



$x+y<0$. $x^2+y^2=-x-y$.

$\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\left(y+\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{2}$

作业

1. (2014•大纲版) 直线 l_1 和 l_2 是圆 $x^2+y^2=2$ 的两条切线．若 l_1 与 l_2 的交点为 $(1,3)$，则 l_1 与 l_2 的夹角的正切值等于 ______.

2. 设圆 C：$x^2+y^2=3$，直线 l：$x+3y-6=0$，点 $P(x_0,y_0)\in l$，存在点 $Q\in C$，使 $\angle OPQ=60^\circ$ (O 为坐标原点)，则 x_0 的取值范围是（　　）

   A. $\left[-\frac{1}{2},1\right]$　　B. $[0,1]$　　C. $\left[0,\frac{6}{5}\right]$　　D. $\left[\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right]$

3. 已知圆 C 过点 $(1,0)$，且圆心在 x 轴的正半轴上，直线 l：$y=x-1$ 被该圆所截得的弦长为 $2\sqrt{2}$，则圆 C 的标准方程为 ______.

4. 过点 $P(1,1)$ 的直线，将圆形区域 $\{(x,y)|x^2+y^2\leqslant 4\}$ 分为两部分，使得这两部分的面积之差最大，则该直线的方程为（　　）

   A. $x+y-2=0$　　B. $y-1=0$

   C. $x-y=0$　　D. $x+3y-4=0$

5. 在平面直角坐标系 xOy 中，点 A，B 是圆 $x^2+y^2-6x+5=0$ 上的两个动点，且满足 $|AB|=2\sqrt{3}$，则 $|\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}|$ 的最小值为 ______.